
Examen Partiel du 1 mars 2016

(14h-17h)

documents, calculatrice, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Exercice 1. Le plan complexe \mathbb{C} est identifié à \mathbb{R}^2 par $z = x + iy$. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide.

- (1) Montrer que les seules fonctions analytiques définies sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R} sont les constantes.
- (2) Soit f et g deux fonctions analytiques définies sur Ω telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \Omega$. Prouver qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in \Omega$. *Indication* : on pourra appliquer (1) à une fonction bien choisie.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy - ay^2.$$

Trouver toutes les fonctions holomorphes f telles que $P = \operatorname{Re}(f)$.

Exercice 3. Soient $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, $r \in]0, 1[$, $M > 0$ et $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur \mathbb{D} telle que $|f(z)| \leq M$ si $|z| = r$. On suppose que $f(0) = a_0 \neq 0$ et qu'il existe $z_0 \in B(0, r)$ tel que $f(z_0) = 0$.

- (1) Donner l'expression locale de f au voisinage du point z_0 .
- (2) Montrer que

$$|a_0|r \leq |z_0|(M + |a_0|).$$

Indication : considérer la fonction $h(z) = f(z)/(z - z_0)$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité et $f: \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ une fonction analytique telle que $|f(z)| \rightarrow 1$ lorsque $|z| \rightarrow 1$.

(1) Montrer qu'ou bien f est constante ou bien il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $f(z_0) = 0$.
Indication : considérer la fonction $1/f$.

(2) Prouver que si f n'est pas constante, alors elle n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{D}$.

(3) Soient $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{D}$ les zéros de f et soient m_1, \dots, m_N leurs multiplicités respectives. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 telle que $f = \lambda \prod_{1 \leq j \leq N} \varphi_{a_j}^{m_j}$,

où

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Indication : on pourra appliquer (1) à une fonction bien choisie.

Exercice 5. (1) Soit $a > 0$. On pose $\Gamma(t) = re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer :

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}.$$

(2) Soient $a > 0$ et $b > 0$. On pose $\gamma(t) = a \cos(t) + ib \sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Reconnaitre la courbe γ^* et calculer

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

en fonction de $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$.

(3) Exprimer I en fonction de

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}.$$

En déduire la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} = \frac{2\pi}{ab}.$$